

Sada příkladů na Fubiniovu větu a větu o substituci

Fubiniovu větu budeme používat v následujícím tvaru:

**Věta 1** (Fubiniova věta). *Pro funkci  $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$  a množinu  $A \in \mathcal{B}^{p+q}$  platí*

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\pi_1 A} \left( \int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left( \int_{A^y} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Věta 2** (Věta o substituci). *Bud'  $U \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  difeomorfismus a  $f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x)) |\mathcal{J}\varphi(x)| dx = \int_{\varphi(U)} f(y) dy,$$

*má-li jedna strana smysl.*

*Je-li navíc  $B \subset \varphi(U)$  Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x)) |\mathcal{J}\varphi(x)| dx = \int_B f(y) dy,$$

*má-li jedna strana smysl.*

### Příklady:

1. Spočtete  $\lambda_2(M)$ , kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x \geq y \geq \frac{3}{x}, x > 0 \right\}.$$

2. Spočtete  $\lambda_2(M)$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \geq y \geq x^2\}.$$

3. Spočtete  $\int_M f$ , kde

$$M = [3, 4] \times [1, 2], \quad f(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2}.$$

4. Spočtete  $\int_M f$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}, \quad f(x, y) = e^{-(x+y)}.$$

5. Spočtete  $\int_M f$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, y \geq x^2\}, \quad f(x, y) = x^2 + y.$$

6. Spočítejte  $\int_M f$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (polární souřadnice).

7. Spočítejte  $\int_M f$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (polární souřadnice).

8. Spočítejte  $\int_M f$ , kde  $M$  je množina omezená plochami  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  a  $x + y + z = 1$  pro funkci

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}.$$

9. Spočítejte  $\int_M f$ , kde  $M$  je množina omezená plochami  $x = y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $z = 0$  a  $z = xy$  pro funkci  $f(x, y, z) = xyz$ .

10. Spočítejte  $\lambda_2(M)$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 8(x^2 - y^2)\}.$$

Návod: použijte polární souřadnice.

11. Spočítejte  $\lambda_2(M)$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y)^4 < 3x^2y, x > 0\}.$$

Návod: použijte substituci pomocí zobrazení  $(r, \phi) \mapsto (r \cos^2 \phi, r \sin^2 \phi)$ .

12. Spočítejte  $\lambda_2(M)$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \leq 4y, 2x \leq y^2 \leq 3x\}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (zobrazení  $(x, y) \mapsto (\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x})$ ).

13. Spočítejte  $\lambda_2(M)$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + y \leq 2, 2x \leq y \leq 3x\}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (zobrazení  $(x, y) \mapsto (x + y, \frac{y}{x})$ ).

14. Spočtete  $\lambda_3(M)$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho\},$$

$\rho > 0$ . Návod: použijte sférické souřadnice.

15. Spočtete  $\lambda_3(M)$ , kde

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2z, x^2 + y^2 < z^2\}.$$

Návod: použijte sférické souřadnice.

16. Spočtete  $\lambda_3(M)$ , kde

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 2\}.$$

Návod: použijte cylindrické souřadnice, nebo polární v kombinaci s Fubiniovou větou.

17. Spočtete  $\int_M f$  pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

a pomocí této hodnoty spočtete  $\int_0^\infty e^{-x^2}$ .

18. Pro  $b > a > 0$  spočtete  $\int_M f$  pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, b > y > a\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 y^2},$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

19. Pro  $b > a > 0$  spočtete  $\int_M f$  pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > x > 0, b > y > a\}, \quad f(x, y) = x^y,$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

20. Spočtete  $\int_M f$  pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.